実験データを係数にもつ微分方程式の求解に関するプログラムについて

八木　寛
後藤健輔

On the computer program for solving differential equations using measured data as coefficients.

Hiroshi YAGI
Kensuke GOTO

This paper reports on the ALGOL program for solving the nonlinear differential equation containing the data given by the experiment as the coefficient.

This method is very available because we have not necessity for making the approximation by the nonlinear fanction experimented data. We can make it use in the case of any types of nonlinear.

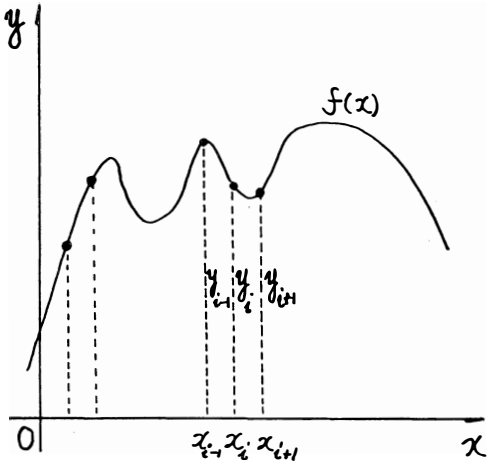
By this method, We store the sampled data of the characteristics curve in memory of EIectronic computer directly. we can make to compute the solution of differential equations by making use it appropriately.

1. まえがき

工学問題を処理するにあたっては，実験により得られたデータを利用して，方程式を解く必要のあることが多い。この場合，実験により得られた数値がきわめて簡単な函数関係を満たす場合は，すぐに函数近似することができ，その近似式を用いて方程式の解を得ることができる。しかし，実験データがかなり複雑な関数関係にある場合には，かなり高次式を用いて近似しなければならず，この近似式を得ること自体が大変である。そこで，方程式を解くのに，このような実験データを一度，関数近似して，それを用いて解を得るという面倒をさけ，直接，実験データを電子計算機の記憶装置に入れておき，方程式を解くにさいして，それを逐時用いて，求解できないかということが考えられる。以下には，この方法について，簡単な原理を説明し，それをトンネルダイオード(図—3参照)のような複雑な函数関係にあるデータを直接用いて，4階非線型常微分方程式で与えられる現象の解析に応用する。しかし，勿論，本理論は以下に議論する問題のみに限定されるものではない。

2. 理　論

実験によって得られたデータはかりに図1にしめすような特性を有する場合，この特性を高次函数で近似し，その近似式を電子計算機に入れて目的の計算を遂行させてもよいわけであるが，実際には，この特性を近似すること自体，大変難しいので，それに代って，図，1の特性をXに関しで等分割し（等分割でなくても，その分割の仕方さえ明確に規定されておればよい

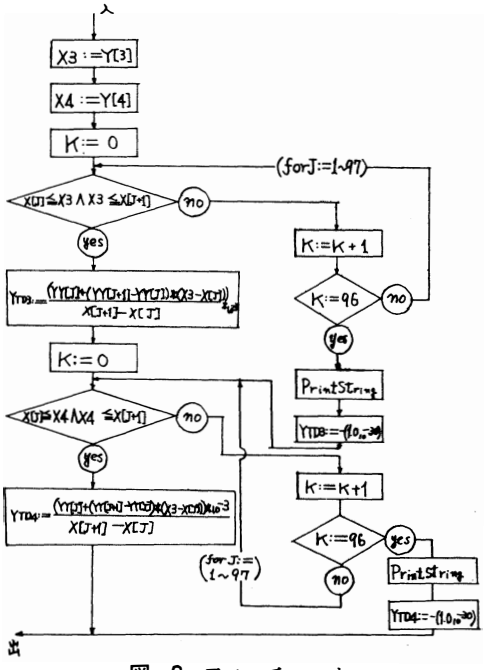


図—1　測定により得られた特性

のである），その分割点Xiに対応したYiを読み，各値を記憶装置に記憶させておく。ただし，この分割の細かさは，特性の曲りの大小，すなわち，特性の高次性に関係するので，得られた実験データを検討して決定しなければならない。かくして，記憶装置に入れた図1のデータを直接利用する本方法による計算の場合と函数近似された近似式にもとずく計算の差異は，前者では注意のXに対応したYを計算するのに，そのXがXi，Xi＋1 の間に入るわけであるが，いずれのI区間に入るかをみつけ，それに対応したYi，Yi＋1を記憶装置より読み出し，その区間に入る値については，比列配分する。これに対して，後者では任意のXに対応したYは函数式に求めるべきXを即時代入してYが決定できる。この計算部分をフローチヤートに書いてみると図2のようになる。この方法を用いる場合記憶容量とそれに格納すべきデータ量を充分検討しておくべきである。

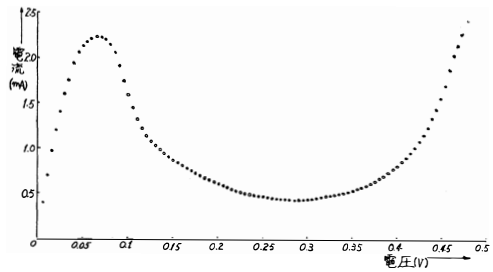
2．線型微分方程式であらわされる現象解析への応用

半導体接合におけるトンネル効果応用素子いわゆるトンネルダイオードが発見されて，エレクトロニクス



図—2　フローチャート

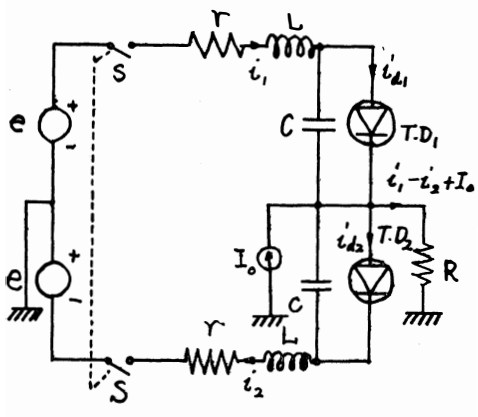
の分野，特に超高速電子計算機において注目を集めてきた。このような素子を用いて論理回路を構成させようという研究が多数発表されてきた。しかし，いずれもトンネルダイオード1本に負荷抵抗を通してバイア



図—3　トンネルダイオード特性

ス電流を流すようにして，双安定回路を得るものである。この他に，トンネルダイオードにトンネルダイオードを通してバイアスを供給するようにした回路が考えられている。これを対回路とよぶ。対回路に関する解析，特にスイッチング時間の算定などについての研究は皆無であるといってよい。以下に，1て述べた理論を適応して解析した結果をしめす。

対回路を図4にしめす。ここで，トンネルダイオードと並列に入っているキヤパシタンスはトンネルダイオードの接合容量であり，実際には端子電圧により容量が変化する。いわゆる非線型特性を有するのであるが，ここでは定数として取扱う。電源に直列に入っているインダクタンスはリード線の浮遊イングクタンスである。IOは対回路を“I„状態，“O„状態にするための信号電流で，以下の解析では階段波であると仮定する。



図—4　トンネルダイオード対回路

図4の回路につき方程式をたてると。

$$V_1 = r \cdot i_1$$

$$V_{L1} = L(di_1/dt)$$

$$V_{c1} = \int \{i_1 - f(V_{c1})\}dt/C$$

$$V_R = (i_1 - i_2 + IO)R$$

$V_{r2}=ri_2$

$V_{L2}=L(di_2/dt)$

$V_{C2}=\int\{i_2-f(V_{C2})\}dt/C$

$e=V_{r1}+V_{L1}+V_{C1}+V_R$

$e=V_{r2}+V_{L2}+V_{C2}-V_R$

が得られる。以上の微積分方程式を i_1, i_2 V_1, V_2 につき整理すると

$di_1/dt=\{(i_2-i_1-I_0)R-i_1r-Vc_1+e\}/L$

$dVc_1/dt=\{f(Vc_1)+i_1\}/C$

$di_2/dt=\{(i_1-i_2+I_0)\cdot R-i_2r-Vc_2-e\}/L$

$dVc_2/dt=\{f(Vc_2)+i_2\}/C$

となる。この連立微分方程式を数値計算により求解するのに，Runge－Kutta－Gill 法を用いる。すなわち連立1階常微分方程式

$dy_i/dx=f_i(x, y_1, y_2\cdots\cdots y_m)$ $(i=1, 2\cdots\cdots, m)$

を初期条件 $X=x_0$ のとき $y_i=y_{i0}$ $(i=1, 2\cdots\cdots, m)$ のもとで解く場合，Xの値をh刻みに選んで

$$Xn=Xo+nh$$

での y_i の値 y_{in} を順次求める。ここで，便宜上，X自身を y_0 と書いて未知関数の仲間に入れると，

$dy_i/dy_0=f_i(y_0, y_1, \cdots\cdots, y_m)$ $(i=0, 1, \cdots\cdots m)$

を解くものと考えればよい。

ここで，x_n での y_i の値，y_i, から x_n での値 $y_{i,n+1}$ を求めの計算式は Runge－Kutta－Gill 法によれば次のようになる。

$k_{i0}=hfi(y_{0n}, y_{1n}, \cdots\cdots y_{mn})$, $r_{i1}=(1/2)k_{i0}-2g_{i0})$

$y_i^{(1)}=y_{in}+r_{i1}$, $q_{i1}=q_{i0}+3r_{i1}-(1/2)k_{io}$

$k_{i1}=h\,fi(y_0^{(1)}, y_1^{(1)}, \cdots\cdots, y_m^{(1)})$,

$r_{i2}=(1-\sqrt{1/2})(k_{i1}-q_{i1})$

$y_i^{(2)}=y_i^{(1)}+r_{i2}$, $q_{i2}=q_{i1}+3r_{i2}-(1-\sqrt{1/2})k_{i1}$

$k_{i2}=h\,fi(y_0^{(2)}, y_1^{(2)}, \cdots\cdots, y_m^{(2)})$,

$r_{i3}=(1+\sqrt{1/2})(k_{i2}-q_{i2})$

$y_i^{(3)}=y_i^{(2)}+y_{i3}$, $q_{i3}=q_{i2}+3r_{i3}-(1+\sqrt{1/2})k_{i2}$

$k_{i3}=h\,fi(y_0^{(3)}, y_1^{(3)}, \cdots\cdots, y_m^{(3)})$,

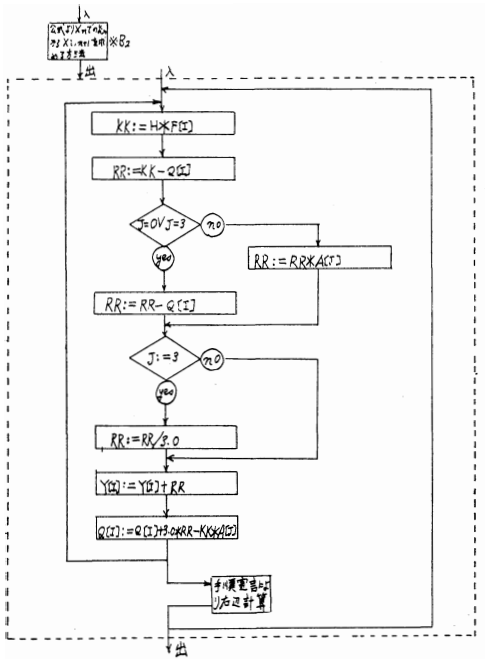
$r_{i4}=(1/6)(k_{i3}-2q_{i3})$

$y_{i,n+1}=y_i^{(3)}+r_{i4}$, $q_{i4}=q_{i3}+3r_{i4}-(1/2)k_{i3}$

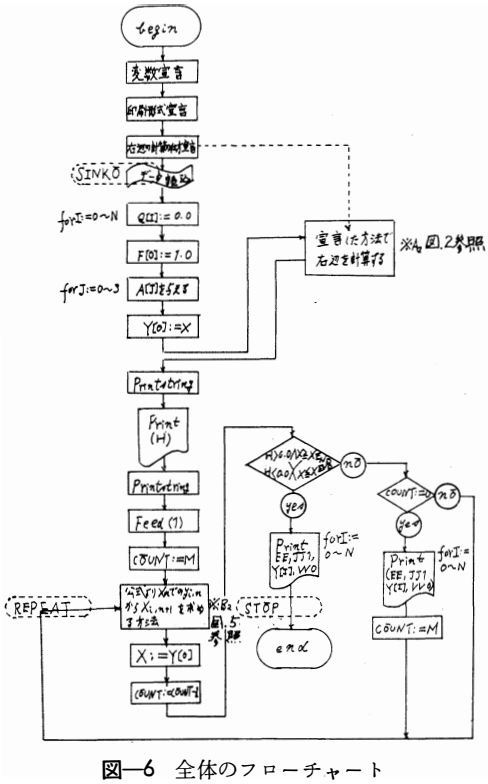
ここ，すべて，iはoからmまで動く。図5には，この部分のフローチヤートをあわし，図6には全体のフローチヤートをしめした。表1にはトンネルダイオードの静特性をかかげた。

実際のプログラムは以下の通りである。（ALGOL方式による。）

```
begin real X, H, XEND, AA, BB, CC, DD,
EE, TT1, VVO, KK, RR;
    integer N, M, I, J, COUNT;
```



図—5 Rによる計算のフローチャート

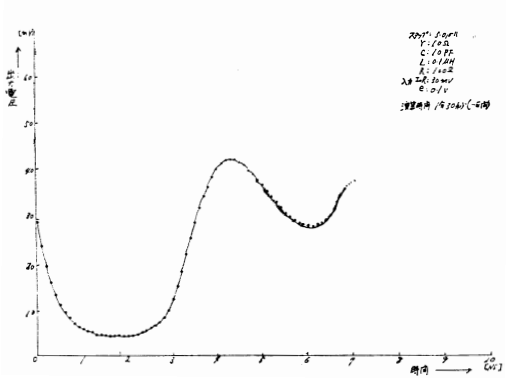


図—6 全体のフローチャート

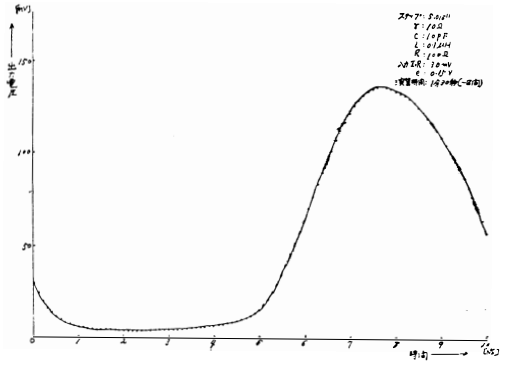
```
  array Y, Q, F[0:10], A[0:3], XX,
  YY[1:97];
Format F2[1.2, '###', 1.4,'#', (('#') ↑4,
-1.6₁₀-2)↑6],
       F3[('#')↑6, 'H=', -1.6₁₀-2];
  Read array (XX[1:97]);
  Read array (YY[1:97]);
Procedure FKT(XX, YY, Y, A, B, C, D, E,
JJ, VO, F);
  Value A, B, C, E, JJ, VO;
  array XX, YY, Y, F;
begin
  integer W, K;
  real X3, X4, YTD3, YTD4;
      X3:=Y[3]; X4:=Y[4]; K:=0;
for W:=1 step until 96 do
begin ifXX[W]≦X3∧X3≦XX[W+1]then
  YTD3:=(YY[W]+(YY[W+1]-YY[W])×
    (X3-XX[W])/(XX[W+1]-XX[W]))×
    10-3
  else K:=K+1;
end;
if k=96 then begin Prgintstring
      ['YTD4#END'];
  YTD3:= -(1.0₁₀30);
end;
  K:= 0 ;
  for W:=1 step 1 until 96 do
begin
  ifXX[W]≦X4∧X4≦XX[W+1] then
YTD4:=(YY[W]+(YY[W+1]-YY[W])×
  (X4-XX[W])/(XX[W+1]-XX[W]))×10-3
  else K:=K+1;
end;
ifK=96 then begin Printstring['YTD4#END'];
    YTD4:= -(1.0₁₀30); end;
  VO:=(Y[1]-Y[2]+JJ)×A
  F[1]:=1.0/B×(-Y[3]+E-(A+D)×
      Y[1]+Y[2]×A-JJ×A);
  F[2]:=1.0/B×(-Y[3]+E-(A+D)×
      Y[2]+Y[1]×A+JJ×A);
  F[3]:=1.0/C×(Y[1]-YTD3);
  F[4]:=1.0/C×(Y[2]-YTD4);
end;
SINKO:Read 11(X, H, XEND, N, M, EE,
    JJ1, AA, BB, CC, DD);
  Read array(Y[O:N]);
  for I:=O step 1 uniil N do Q[I]:=0.0;
  F[0]:=1.0;
  A[0]:=0.5; A[1]:=0.29289322;
    A[2]:=1.70710678
  A[3]:=0.5;
  Y[0]:=X; FKT(XX, YY, Y, AA, BB, CC,
    DD, EE, JJ1, VV0, F);
Printring ['TUNNEL#DIODE#TUIKAIRO#
  NO#TACHIAGARIZIKAN#NI#KANSURO
  #PROGRAM#NO.2'];
Print(F3, H);
  Printstring[E'(V)###I(A)', ('#')↑10,
    'T(SEC)',('#')↑11,
  'I1(A)', ('#')↑12, I2(A), '(#)↑12, 'VC1(V)',
  ('#')↑11, 'VC2(V)', ('#')↑11, 'Vout(V)'];
  Feed(1); COUNT:=M;
REPEAT:
  for J:=O step 1 until 3 do
  begin
  for I:=O step 1 until N do
  begin
  KK:=H×F[1];
  RR:=KK-Q[I];
  if J=O∨J=3 then RR:=RR-Q[I];
  RR:=RR×A[J];
  if J=3 then RR:=RR/3.0;
  Y[I]:=Y[I]+RR;
  Q[I]:=Q[I]+3.0×RR-KK×A[J];
end;
  FKT(XX, YY, Y, AA, BB, CC, DD, EE,
  JJ1, VVO, F);
end;
  X:=Y[O]; COUNT:=COUNT-1;
  if(H>0.0∨X≧XEND)
      ∧(H<0.0∧X≦XEND) then
begin
  Print(F2, EE, JJ1);
  for I:=0 step 1 until M do Print(F2, Y[I]);
  Print(F2, VVO); go to STOP;
end;
  if COUNT=0 then
begin
  Print(F2, EE, JJ1);
  for I:=0 step 1 until M do Print(F2, Y[I];
  Print(F2, VVO); COUNT:=M;
```

```
        go to REPEAT;
end;
  else go to REPEAT;
STOP:
end
```

図3の特性をもつトンネルダイオードを用いて，対回路を構成させると，図7，図8のような立上り特性が得られる。これまで，対回路の立上り計算はなされていなかったのであるが，本方法を利用することにより，各特性計算も実に容易となることがわかる。



図—7 計 算 結 果 例



図—8 計 算 結 果 例

4. 結　論

実験によって得られたデーターの一部を直接利用して，方程式の解を求めるという問題は一般に工学の分野においては少なくないのであるが，そのデータを一度，関数近似するという手間は実際には仲々大変である。そこでそのような難点を避けるようにして求解する方法につきのべてきた。この方法によれば，いかなるデータであろうと，即ち，単調な関数関係にあるものであろうと，複雑な関数関係にあるものであろうとをとわず応用できる。

ここで求解する方法は，各データの中間はすべて比例配分により計算するものであったが，必ずずしもそうでなければならないこともないわけで，各問題に応じて，できるだけ誤差が少なくなるように工夫されればよりすぐれた計算結果が得られるであろう。

最後に，本研究を遂行するにあたり，学内外のいろんな方にお世話になったが，特に終始，御指導賜った四谷教授にお礼を申し上げたい。

参 照 文 献

1. 別所照彦：エサキダイオード対の中点電位波形の計算，昭和37年電気4学会連合大会．
2. 八木　寛：T•D対立上り特性の図式計算について，昭和39年度電気通信学会全国大会．
3. 八木　寛：トンネルダイオード対回路の2種類の発振モードについて，昭和40年電気4学会連合大会
4. M. Schuller : Large Signal Circuit theory for negative Resistance Diodes. P. IRE. 1961, Aug. pp. 1268.
5. G. B. Herzog : Tunnel Diode balanced pairs switching analysis. RCA. Rev. 1962, June. pp. 187

（昭41.10.31受付）